Übungsaufgaben BLF

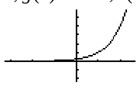
ohne Hilfsmittel

1. Löse die Gleichungen!
   a) $3(x-2)=5x$ b) $\sin(3x)=1$ c) $3^{x+2}=243$
   d) $\sqrt{2x+6}=4$ e) $\lg(100^x)=4$ f) $2\cdot 3^x=6^x$
2. Forme die Terme in eine Summe um!
   a) $(4a+5b)^2=$ b) $(x^2-3x)^2=$ c) $16x(2x-1)=$
3. Forme die Terme in ein Produkt um!
   a) $4x^4-16x=$ b) $y^2-12y+36=$ c) $y^2-25=$
4. Vereinfache so weit wie möglich!
   a) $3x^2\cdot 9x\cdot\frac{1}{3}x^{-2}=$ b) $\frac{a^4\cdot a^{-3}}{a^{-2}}=$ c) $\frac{4x^2-9}{4x^2-12x+9}=$
5. Gegeben sind die Funktionen $f(x)=3x-5$ und $f(x)=x^2$
   Ermittle die Funktionsgleichungen der Verknüpfungen f(x)+g(x), f(x)·g(x), f(x):g(x) sowie der Verkettungen f(g(x)) und g(f(x))

6*. Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x)=\frac{3tx-1}{x^2-t};t\in\Re$
   Ermittle den maximalen Definitionsbereich und die Nullstellen von f_t in Abhängigkeit von t

7. Sei f eine beliebige Funktion und $h(x)=f(x+t), t\in\Re$
   Beschreibe den Einfluss des Parameters t auf den Verlauf des Graphen von h.
8. Von einem unregelmäßigen Viereck ABCD sind alle Seitenlängen und die Diagonale $e=\overline{AC}$ bekannt. Beschreibe dein Vorgehen, um die Fläche des Vierecks zu berechnen.
9. Die Entladung eines Kondensators verläuft exponentiell. Bei einem Experiment wurde nach 10 s eine Stromstärke von 12 mA gemessen, nach 30 s nur noch 8 mA. Beschreibe dein Vorgehen, um die Funktionsgleichung der Entladekurve zu bestimmen.
10. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist bekannt: $\alpha=13°;\beta=90°;c=7{,}2cm$. Die Seiten a und b sollen berechnet werden.
    Karl rechnet: $\sin\alpha=\frac{a}{c}\Rightarrow a=3{,}03cm$. Nimm Stellung zu dieser Lösung, begründe deine Aussage!
11.

	A	B	C
sin 80°	0,0032	0,9848	-09848
lg 12	-0,0792	1,0792	0,0792
$4^{\log_2 4}$	4	16	1
$(3x^2)^3$	$3x^6$	$27x^8$	$27x^6$
$1-\sin^2 x$	$\cos^2 x$	(1-sin x)(1+sin x)	tan x

12. Ordne die Graphen den Funktionen zu! $f(x)=3\cdot 4^x; g(x)=4^{x-1}; h(x)=x^4$
    a)  b)  c) 

13. Skizziere eine Funktion mit den jeweiligen Eigenschaften!
    a) Punktsymmetrisch, Maximum für x>0,genau eine Nullstelle, x-Achse ist Asymptote
    b) Polstellen bei x=-3 und x=3; symmetrisch, ein Maximum, Asymptote y = 1

mit Taschenrechner und Tafelwerk

1. Frau Singer möchte 8000 € anlegen. Vergleiche die folgenden Angebote:
   a) Die A-Bank bietet 5% Zinsen, die Zinsen werden jährlich ausgezahlt
   b) Bei der B-Bank erhält Frau Singer ein Zinssatz von 3,5%, die Zinsen. verbleiben auf dem Konto.
   c) In den ersten drei Jahren bietet die C-Bank 2,8% Zinsen, danach erhöht sich der Zinssatz jährlich um 0,5% Die Zinsen verbleiben auf dem Konto.
2. Tischlerei Holzwurm kauft eine neue Maschine für 18500 €. Im ersten Jahr verliert die Maschine 12% an Wert, danach pro Jahr 6%. Die Maschine soll für mindesten 9000€ weiterverkauft werden. Ermittle, wann die Maschine spätestens weiterverkauft werden muss.
3. In einem Teich können bis zu 2500 Karpfen leben. Zu einem bestimmten Zeitpunkt gibt es 840 Tiere.
   a) Die jährliche Wachstumsrate beträgt 8%. Berechne die Zeit, nach der die Population ihr Maximum erreicht hat.
   b) Ermittle die Wachstumskurve der Population, wenn der Zuwachs 12% der Differenz von Maximalbestand und aktuellem Bestand beträgt. Vergleiche mit a)
   c) Ermittle zu a) und b) die jährlichen Fangquoten so, dass sich eine stabile Population von ca. 1000 Tieren einstellt.
4. Ein Quader hat die Maße a = 80 mm, b = 20 mm, c = 1,2 cm. Berechne den Winkel α. (Abb. 1) und die Fläche des Dreiecks ACG

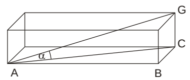


Abb. 1

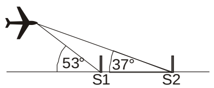


Abb. 2

5. Ein Flugzeug fliegt mit gleichbleibender Höhe mit einer Geschwindigkeit von 420 kmh^{-1}. Es wird 12.10 Uhr von zwei 2,5 km voneinander entfernten Radarstationen angepeilt. (Abb.2)
   a) Berechne die Entfernungen des Flugzeuges von den Stationen.
   b) Zeige rechnerisch, dass die Flughöhe des Flugzeuges 4,4 km beträgt.
   c) Ermittle die Uhrzeit, zu der das Flugzeug den geringsten Abstand von Station 1 hat. Ermittle zu diesem Zeitpunkt den Peilwinkel von Station 2.
   d) Das Flugzeug bewegt sich genau auf ein 6,3 km hohes Felsmassiv zu. Die maximale Steigung, die das Flugzeug erreichen kann, beträgt 8% Ermittle die .Entfernung vom Massiv, in der der Pilot spätestens in Steigflug gehen muss, damit das Massiv überflogen wird.
6. Im Parallelogramm ABCD gilt: α = 30°, a = 6,3 cm, b = 3,4 cm. Der Punkt E ist der Mittelpunkt der Seite CD.
   a) Berechne die Fläche des Dreiecks ABE.
   b) Begründe, dass die Fläche des Dreiecks unabhängig von der Lage des Punktes E auf CD ist.
7. Untersuche die Funktionen $f(x)=\frac{2x-3}{x^2+4x-20}$ und $g(x)=\lg(x^2-2x+1)$ Gib jeweils Definitions- und Wertebereich, Nullstellen, Extrema, Monotonieverhalten und Asymptoten an. Handelt es sich um verkettete oder verknüpfte Funktionen? Gib jeweils die Basisfunktionen an.

8*. Untersuche die Funktionenschar $f_a(x)=(x^2-ax+2)e^{-x}; a\in\Re$
   a) Gib Definitions- und Wertebereich, Nullstellen, Extrema, Monotonieverhalten und Asymptoten von f_4 an.
   b) Untersuche die Schar auf Nullstellen in Abhängigkeit von a. Diskutiere auch die Anzahl der Nullstellen

Lösungen Teil 1

1.

a) $3(x-2)=5x$
$3x-6=5x \mid -3x$
$-6=2x \mid :2$
$x=-3$

b) $\sin(3x)=1 \Leftrightarrow$
$3x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow$
$x=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi$

c) $3^{x+2}=243$
$9\cdot 3^x=243$
$3^x=27$
$x=3$

d) $\sqrt{2x+6}=4 \Leftrightarrow$
$2x+6=16 \mid -6$
$2x=10 \mid :2$
$x=5$

e) $\lg(100)^x=4$
$\lg 10^{2x})=4$
$2x=4$
$x=2$

f) $2\cdot 3^x=6^x \mid :3^x$
$2=\frac{6^x}{3^x}=\left(\frac{6}{3}\right)^x=2^x$
$x=1$

2. a) $16a^2+40ab+25b^2$ b) $x^4-6x^3+9x^2$ c) $32x^2-16x$
3. a) $4x(x^3-4x)$ b) $(y-6)^2$ c) $(y-5)(y+5)$
4. a) $9x$ b) a^3 c) $\frac{(2x-3)(2x+3)}{(2x-3)^2}=\frac{2x+3}{2x-3}$
5.
$f(x)+g(x)=x^2+3x-5$
$f(x)\cdot g(x)=(3x-5)x^2=3x^3-5x^2$
$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{3x-5}{x^2}$
$f(g(x))=3x^2-5;\ g(f(x))=(3x-5)^2=9x^2-30x+25$
6. Definitionsbereich: Nennerfunktion darf nicht null werden, d.h. $x^2+t=0 \Leftrightarrow x^2=t$
Die Gleichung hat für t<0 keine Lösung, für t=0 genau eine und für t>0 zwei Lösungen, d.h.
$D_{f_t}=\Re$ *für* $t<0$
$D_{f_t}=\{x\in\Re \mid x\neq 0\}$ *für* $t=0$
$D_{f_t}=\{x\in\Re \mid x\neq -\sqrt{t} \wedge x\neq\sqrt{t}\}$ *für* $t>0$
Nullstellen: Nullstellen existieren genau ort, wo die Zählerfunktion ihre Nullstellen hat.
$f_t(x)=0 \Leftrightarrow 3tx-1=0 \Leftrightarrow 3tx=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3t};$ *für* $t\neq 0$
für t=0 existiert keine Nullstelle
7. Der Graph von h entsteht durch Verschiebung des Graphen von f parallel zu x-Achse um t Einheiten. Ist t positiv erfolgt die Verschiebung in negative x-Richtung, für negative t in positiver x-Richtung
8. Aus den Seiten a und b sowie der Diagonale e lässt sich der Winkel β mit Hilfe des Kosinussatzes berechnen. ($e^2=a^2+b^2-2ab\cos\beta$). Jetzt kann die Fläche des Dreiecks ABC über die Formel $A=\frac{1}{2}ab\sin\beta$ berechnen. Analog wird der Winkel γ aus c, d und e ermittelt, anschließend die Fläche des Dreieck ACD. Die Fläche des unregelmäßigen Vierecks ergibt sich als Summe der Flächen der beiden Teildreiecke.
9. Die gemessenen Zeiten werden im Statistikmenü in eine Liste eingetragen, die Stromstärken in eine zweite. Über eine exponentielle Regression erhält man die Gesuchte Funktionsgleichung.
10. Die Seite b ist die Hypotenuse des Dreiecks, also muss der Ansatz lauten $\sin\alpha=\frac{a}{b}$. Klaus Lösung ist demzufolge falsch.

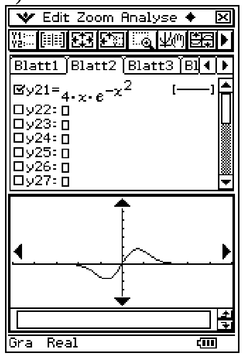
Carsten Stauch Gymnasium Coswig

11.

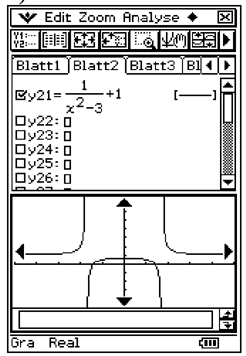
	A	B	C
sin 80°	0,0032	0,9848✓	-09848
lg 12	-0,0792	1,0792✓	0,0792
$4^{\log_2 4}$	4	16✓	1
$(3x^2)^3$	$3x^6$	$27x^8$	$27x^6$✓
$1-\sin^2 x$	$\cos^2 x$✓	(1-sin x)(1+sin x) ✓	tan x

12. a) h(x); b) f(x), c) g(x)

13. a)



b)



Lösungen Teil 2

1. Modellierung über Tabellenkalkulation; für a) lineares Wachstum, b) exponentielles Wachstum
   c) zusätzlich Verlauf des Zinssatzes

Datei Edit Graph Aktion

	A	B	C	D	E
1		A	B	C	
2	0	8000	8000	8000	1.028
3	1	8400	8280	8224	1.028
4	2	8800	8569.8	8454.272	1.028
5	3	9200	8869.74	8690.992	1.033
6	4	9600	9180.18	8977.794	1.038
7	5	10000	9501.49	9318.951	1.043
8	6	10400	9834.04	9719.665	1.048
9	7	10800	10178.2	10186.21	1.053
10	8	11200	10534.5	10726.08	1.058
11	9	11600	10903.2	11348.19	1.063
12	10	12000	11284.8	12063.13	1.068
13	11	12400	11679.8	12883.42	1.073
14	12	12800	12088.5	13823.91	1.078
15	13	13200	12511.6	14902.17	1.083
16	14	13600	12949.6	16139.05	1.088
17	15	14000	13402.8	17559.29	1.093

=C3·1.035

C4:C17

Anlage A ist durch den relativ hohen Zinssatz für lange die günstigste Variante, erst nach 10 Jahren bekommt man bei Angebot C mit den wachsenden Zinsen mehr Geld. Angebot B ist trotz der Zinseszinsen nicht zu empfehlen, erst nach 21 Jahren rentiert es sich gegenüber Angebot A, bleibt aber hinter C zurück

2. Variante A:

   $\text{nach 1. Jahr}: W = 0.88 \cdot 18500 = 16280$

   $\text{weitere Entwicklung exponentiell}: f(x) = 16280 \cdot 0{,}94^{x-1}$

   $solve(f(x) = 9000) \Rightarrow x = 10{,}6 \Rightarrow nach\ 10\ Jahren$

Variante B: Tabellenkalkulation, jährliche Berechnung

Datei Edit Graph Aktion

	A	B	C
1			
2	0	18500	
3	1	16280	
4	2	15303.2	
5	3	14385.0	
6	4	13521.9	
7	5	12710.6	
8	6	11948.0	
9	7	11231.1	
10	8	10557.2	
11	9	9923.78	
12	10	9328.36	
13	11	8768.65	
14	12	8242.53	

=B2·0.88

B3 16280

Nach 10 Jahren muss der Weiterverkauf spätestens erfolgen

3. a)

   $f(x) = 840 \cdot 1{,}08^{x}$

   $solve(f(x) = 2500) \Rightarrow 14{,}17$

   nach knapp 14 Jahren wär e das Maximum erreicht

   b)

Datei Edit Graph Aktion

	A	B	C
1		b)	a)
2	0	840	840
3	1	1039.2	907.2
4	2	1214.5	979.78
5	3	1368.8	1058.2
6	4	1504.5	1142.8
7	5	1624.0	1234.2
8	6	1729.1	1333.0
9	7	1821.6	1439.6
10	8	1903.0	1554.8
11	9	1974.6	1679.2
12	10	2037.7	1813.5
13	11	2093.2	1958.6
14	12	2142.0	2115.3

840

C2 840

   Das Wachstum erfolgt zu Beginn etwas schneller als in a) dann deutlich langsamer, der Maximal-Bestand wird nur asymptotisch erreicht

c) zu a) $f(x) = 1000 \cdot 1.08^{x} \Rightarrow f(1) = 1080$ Es könnten also jährlich 80 Tiere gefangen werden
   zu b) $Zuwachs: 0.12(2500 - 1000) = 180$ Es können jährlich ca. 180 Tiere gefangen werden

4.

$$sei\ e = \overline{AC}$$

$$\tan\alpha = \frac{c}{e};\ mit\ e = \sqrt{a^2 + b^2}$$

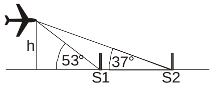
$$\tan\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 8{,}3°$$

5. a) Peilwinkel 1: α = 53°; Peilwinkel 1: β = 37°

$\angle FS_1S_2 = 127°(Nebenwinkel\ zu\ \alpha); \angle S_2FS_1 = 16°(IWS)$

$\frac{\overline{S_1F}}{\sin 37°} = \frac{\overline{S_1S_2}}{\sin 16°}(Sinussatz) \Rightarrow \overline{S_1F} = 5{,}458km; ana\log: \overline{S_2F} = 7{,}244km$

b)



$\sin(53°) = \frac{h}{\overline{S_1F}} \Rightarrow h = 4{,}369km \approx 4{,}4km$

c) geringster Abstand, d.h. das Flugzeug befindet sich direkt über S1, die Flugstrecke sei s

$\cos 53° = \frac{s}{\overline{S_1F}} \Rightarrow s = 3{,}285km$

$t = \frac{s}{v} \Rightarrow t = 0{,}0078h = 28s$

Das Flugzeug ist 28s nach der Messung direkt über S1, d.h., praktisch 12.10 Uhr

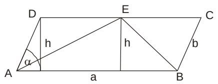
$Peilwinkel\,2: \tan\angle S_1S_2F = \frac{h}{\overline{S_1S_2}} \Rightarrow \angle S_1S_2F = 60{,}22°$

d) $H\ddot{o}hendifferenz\ \Delta y: 6{,}3km - 4{,}4km = 1{,}9km$

$Steigung\ 8\%: \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0{,}08 \Rightarrow \Delta x = \frac{\Delta y}{0{,}08} = 23{,}75$

Der Pilot muss spätestens 23,75km vor der Felswand den Steigflug einleiten.

6.



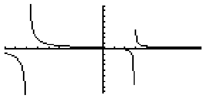
$\sin\alpha = \frac{h}{b} \Rightarrow h = 1{,}7cm$

$A = \frac{1}{2}a \cdot h = 5{,}4cm^2$

b) Egal, wo sich der Punkt E auf CD befindet, die Höhe des Dreiecks bleibt konstant, die Grundseite ebenfalls, die Fläche ändert sich demzufolge nicht.

7.

$f(x) = \frac{2x-3}{x^2+4x-20}$



$x^2 + 4x - 20 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -6{,}899 \vee x_2 = 2{,}899$

$D_f = \{x \in \Re \mid x \neq -6{,}899 \wedge x \neq 2{,}899\}$

$W_f = \Re$

$NST: f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1{,}5; S_y(0; \frac{3}{20}) = (0;0{,}15)$

$EXT: -; WP: -$

$MON: fallend$

$SYM: -$

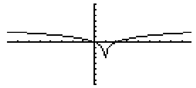
$POL: x_{p_1} = -6{,}899; x_{p_2} = 2{,}899$

$ASY: x-Achse; x = -6{,}899; x = 2{,}899$

$g(x) = \lg(x^2 - 2x + 1)$

$\lg$ – Funktion nur positive Argumente, $x^2 - 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$D_f = \{x \in \Re \mid x \neq 1\}; W_f = \Re;$



$NST: \lg z = 0 \Leftrightarrow z = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 2$

$S_y(0;0);$

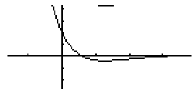
$EXT: -; WP: -$

$MON: x < 1: fallend; x > 1: steigend$

$SYM: Achsensym.\ zu\ x = 1$

$POL: x_p = 1; ASY: x = 1$

8. a) $f_4(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$



$D_f = \Re$

$W_f = \{y \in \Re \mid y \geq -0{,}412\}$

$NST: x_1 = 0{,}586 \wedge x_2 = 3{,}414$

$EXT: Min: (1{,}268; -0{,}412); Max(4{,}732; 0{,}048)$

$MON: x < 1{,}268 \wedge x > 4{,}732: fallend; 1{,}268 < x < 4{,}732: wachsend$

$ASY: y-Achse$

b)

$f_a(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - 2}$

$keine\ NST: \frac{a^2}{4} - 2 < 0 \Leftrightarrow a^2 < 8 \Leftrightarrow -\sqrt{8} < a < \sqrt{8}$

$eine\ NST: \frac{a^2}{4} - 2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 8 \Leftrightarrow a = -\sqrt{8} \vee a = \sqrt{8}$

$eine\ NST: \frac{a^2}{4} - 2 > 0 \Leftrightarrow a^2 > 8 \Leftrightarrow a < -\sqrt{8} \vee a > \sqrt{8}$